מבחן בקורס מודלים חישוביים, חישוביות וסיבוכיות (67521)

מועד א, 23.7.23

מרצים: פרופ' עמרי וינשטין ופרופ' עודד שוורץ
מתרגלים: עופר לשקוביץ, יואב מורן, ונעמה שמש-הלוי
צאריות: יעל פורת ועופר פיינשטיין

הוראות כלליות:

1. משך המבחן 3 שעות.
2. במבחן 9 שאלות, יש לענות על כולן.
3. סך הנקודות במבחן זה הוא 108 נקודות. ציון המבחן יהיה סך הנקודות שצברת, כאשר הציון המקסימלי שניתן לקבל הוא 100.
4. השיבו על השאלות על גבי טופס זה בלבד. המחברות הן טיוטה ולא ייבדקו.
5. במידה ואתם זקוקים למקום נוסף לצורך מענה על סעיף כלשהו, השתמשו בדפי התשובות הריקים המופיעים בסוף טופס זה. אם אתם זקוקים לדפי תשובות נוספים, עליכם לבקש מהמשגיח/ה טופס שלם נוסף. אין להוסיף דפים בודדים.
6. נסחו במדויק כל טענה בה אתם עושים שימוש. **מותר להשתמש בטענות שנלמדו בכיתה, בתרגול או בתרגיל אלא אם נתבקשתם להוכיח אותן בשאלה**.
7. השימוש בכל חומר עזר אסור.

בהצלחה!

שאלה 1 (12 נקודות)

נתונה השפה $L = \left((a+b)a\right)^*$.

ציירו אוטומט DFA מינימלי לשפה והוכיחו שלא קיים אוטומט קטן יותר.

אין צורך להוכיח ששפת האוטומט היא L.

האוטומט המינימלי (ציירו):

הוכחה:

שאלה 2 (12 נקודות)

יהי Σ א״ב סופי. נגדיר את הפונקציה $cyclic: \Sigma^* \to \Sigma^*$ המפעילה פרמוטציה ציקלית על מילים:

- עבור המילה הריקה נגדיר $cyclic(\varepsilon) = \varepsilon$.
- ולכל $w = x \cdot a \in \Sigma^*$ כאשר $a \in \Sigma$ נגדיר $cyclic(w) = a \cdot x$.

לדוגמה, אם $\Sigma = \{1,2,3,4\}$ אז $cyclic(1234) = 4123$.

כעת עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$ נגדיר: $cyclic(L) = \{cyclic(w) \mid w \in L\}$.

טענה: אם L רגולרית אז $cyclic(L)$ רגולרית.

הטענה (הקיפו):	נכונה	לא נכונה

הוכחה:

שאלה 3 (12 נקודות)

נתון הדקדוק $G = (V, \Sigma, R, X)$ המוגדר באופן הבא:

- קבוצת המשתנים $V = \{X, Y, Z\}$ כאשר X הוא המשתנה ההתחלתי.
- קבוצת הטרמינלים $\Sigma = \{a, \#, @\}$
- R הוא אוסף כללי הגזירה הבאים:

$$X \to YY \mid Z$$
$$Y \to aY \mid Ya \mid @$$
$$Z \to aZaa \mid \#$$

טענה: השפה $L(G)$ המוגדרת ע"י G היא שפה רגולרית.

הטענה (הקיפו): נכונה לא נכונה

הוכחה:

שאלה 4 (12 נקודות)

נגדיר את השפה הבאה : $L = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid \langle M_1\rangle \in L(M_2) \text{ and } \langle M_2\rangle \in L(M_1)\}$.

לאיזו מחלקת חישוביות שייכת L?

המחלקה (הקיפו) : $\overline{RE \cup coRE}$ $coRE \setminus R$ $RE \setminus R$ R

הוכחה :

שאלה 5 (12 נקודות)

נגדיר את השפה הבאה : $L = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| < \infty \text{ and } |L(M)| \; mod \; 7 = 0\}$.

לאיזו מחלקת חישוביות שייכת L?

המחלקה (הקיפו) : $\overline{RE \cup coRE}$ $coRE \setminus R$ $RE \setminus R$ R

הוכחה :

שאלה 6 (12 נקודות)

תהי פונקציה חשיבה $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ ושפה $L \subseteq \Sigma^*$ המקיימת $f(L) \neq \Sigma^*$.

טענה: אם $L \in RE$ אז $L \leq_m f(L)$.

הטענה (הקיפו): נכונה לא נכונה

הוכחה:

שאלה 7 (12 נקודות)

משפט א׳: קיימת רדוקציה פולינומיאלית f מ- $3SAT$ ל- $CLIQUE$, כך ש: $|image(f)| \leq 5$.

משפט ב׳: $P = NP$.

טענה: אם משפט א׳ נכון אז בהכרח משפט ב׳ נכון.

הטענה (הקיפו): נכונה לא נכונה

הוכחה:

שאלה 8 (12 נקודות)

נאמר שמסלול הוא פשוט אם הוא לא מכיל פעמיים את אותו קודקוד (כלומר חסר מעגלים).

נגדיר את השפה הבאה:

$$L = \left\{(G,s,t,k) : \begin{array}{l} G \text{ is a directed graph that contains a} \\ \text{simple path from } s \text{ to } t \text{ of length } \geq k \end{array}\right\}$$

לאיזו מחלקת סיבוכיות שייכת L?

המחלקה (הקיפו): $coNP - complete$ $NP - complete$ P

הוכחה:

שאלה 9 (12 נקודות)

תזכורת: $EXP = \bigcup_{k=1}^{\infty} DTIME\left(2^{n^k}\right)$

טענה: $DTIME(2^n) = EXP$.

הטענה (הקיפו): נכונה לא נכונה

הוכחה:

עמוד תשובות נוסף, מספר 1

המשך שאלה _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 2

המשך שאלה _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 3

המשך שאלה _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 4

המשך שאלה _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 5

המשך שאלה _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 6

המשך שאלה _____